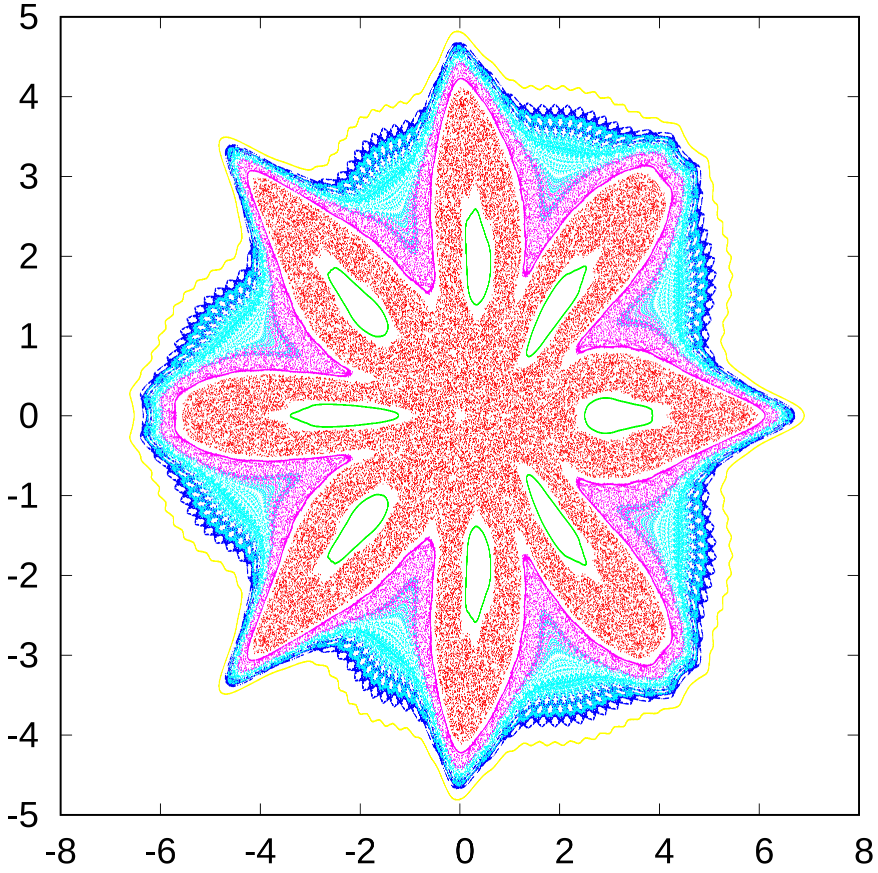
Sistemas Dinámicos y Caos

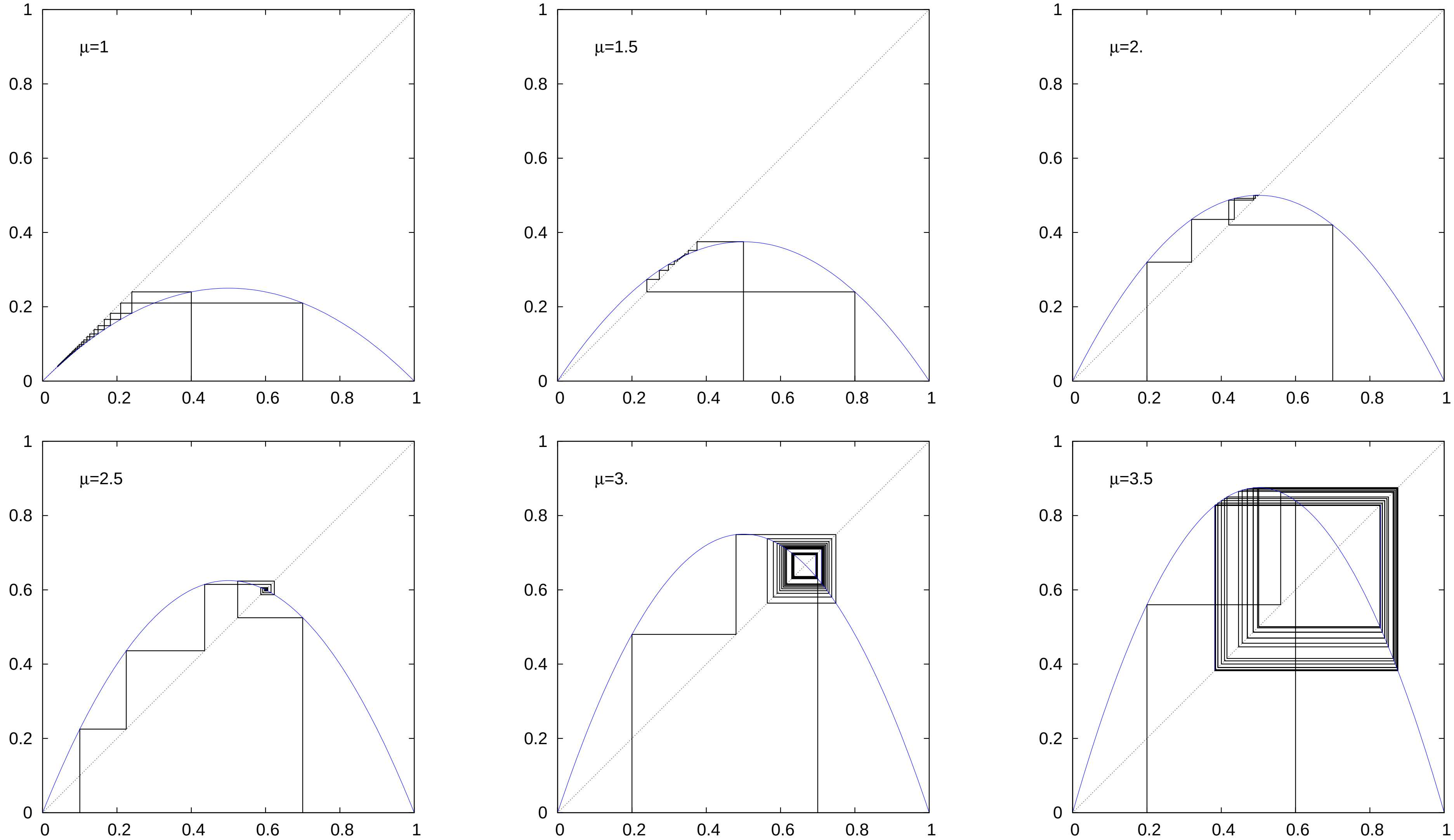


Salvador Jiménez
s.jimenez@upm.es

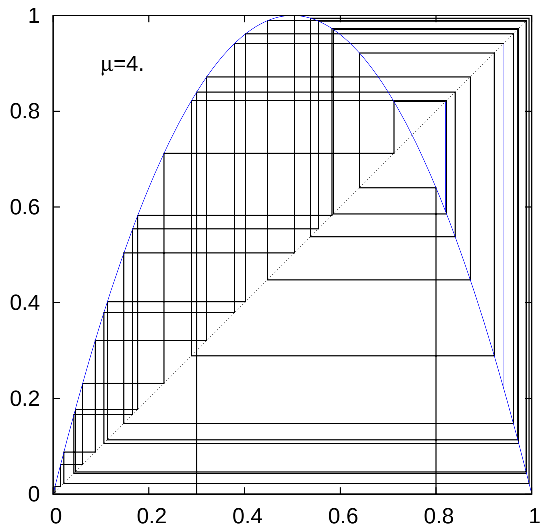
- Tema 1: Introducción y conceptos básicos
- Tema 2: Sistemas dinámicos de tiempo continuo
- Tema 3: Sistemas dinámicos de tiempo discreto
- Tema 4: Elementos de bifurcaciones y teoría del caos

- Los sistemas dinámicos representan modelo con evolución con respecto a un parámetro que llamamos tiempo. Este tiempo puede ser una variable continua o una discreta. En la asignatura se tratan ambos casos.
- Se busca conocer el comportamiento cualitativo y cuantitativo de todo el sistema. Para ello se analiza el comportamiento para tiempos crecientes y los atractores hacia los que se dirigen las soluciones: puntos, soluciones periódicas, atractores extraños (caóticos). El estudio usa herramientas analíticas pero también simulaciones numéricas.
- Las clases son todas en un aula informática para poder implementar directamente la teoría sobre modelos concretos.
- La evaluación continua consiste en la realización de cuatro prácticas (una por tema) por parejas.
- Los alumnos que no aprueban por evaluación continua se presentan al exámen (ordinario o extraordinario), que consiste en una prueba similar a las prácticas, pero individual.

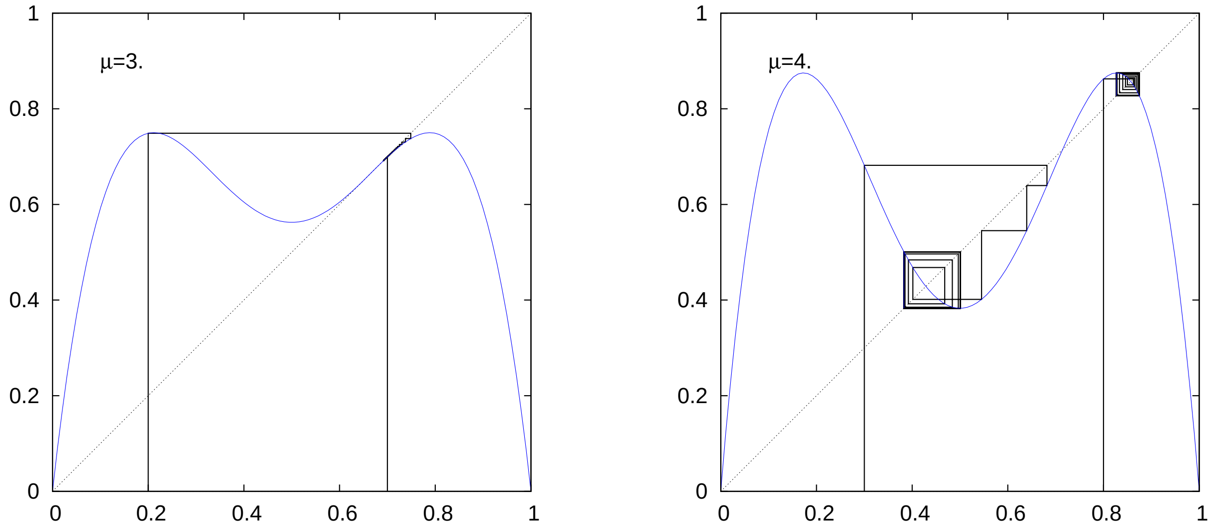
A continuación algunas imágenes de estudios realizados en diferentes temas. La programación es en Maple (como apoyo a la parte analítica) y (de manera indiferente) en Matlab, C, python... (para la parte numérica).



Órbitas de la aplicación logística, para distintos datos iniciales



Órbitas de la aplicación logística, $\mu = 4.$, para distintos datos iniciales

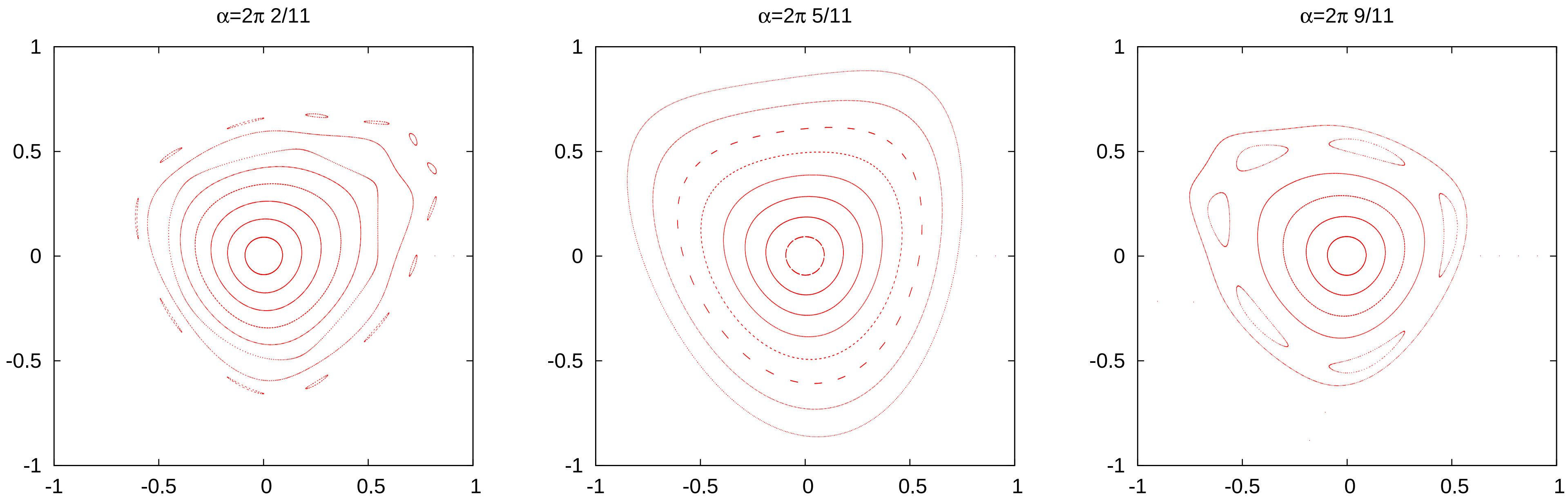


Órbitas de la aplicación logística compuesta, para distintos datos iniciales

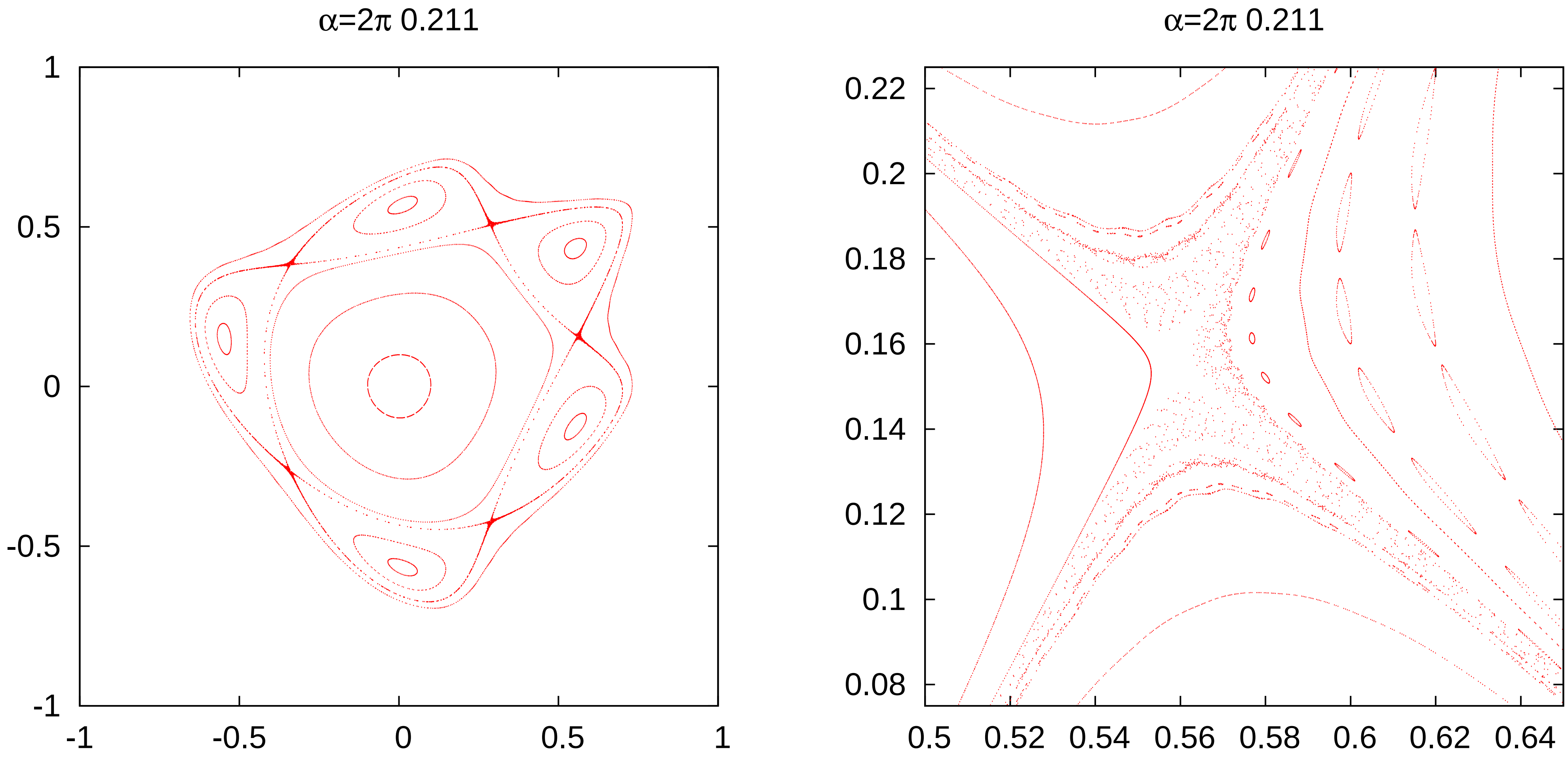
Ejemplo: El sistema conservativo discreto de Hénon (o aplicación conservativa de Hénon), viene dada por las ecuaciones:

♣ *Ojo: hay otra aplicación de Hénon, no conservativa, que es la famosa.*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos(\alpha)x_n - \operatorname{sen}(\alpha)\left(y_n - {x_n}^2\right) \\ y_{n+1} = \operatorname{sen}(\alpha)x_n + \cos(\alpha)\left(y_n - {x_n}^2\right) \end{cases}$$

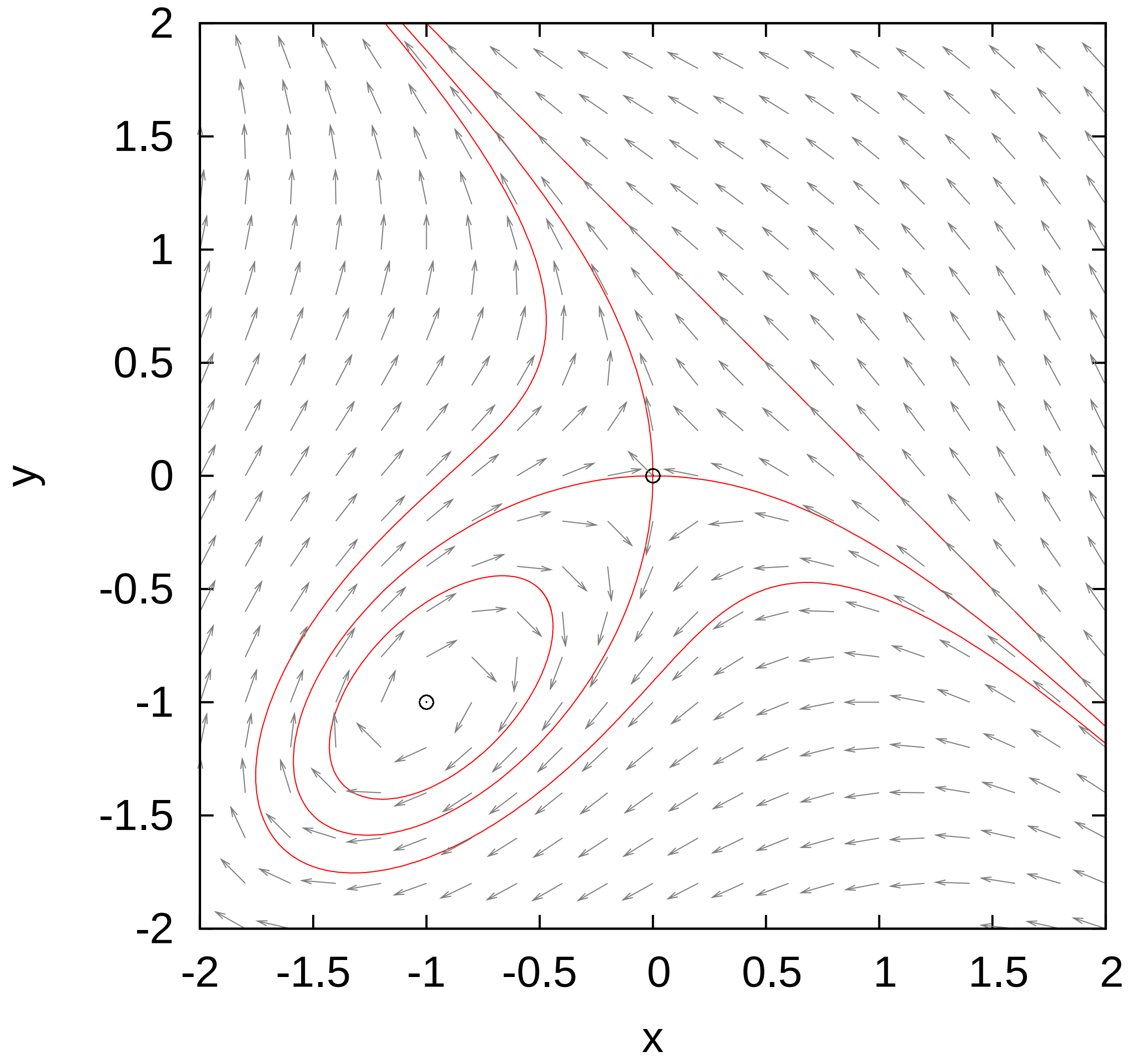


Órbitas de la aplicación de Hénon, para distintos datos iniciales



Órbitas de la aplicación de Hénon, para distintos datos iniciales (dcha: detalle)

♣ *Este es el famoso caos en sistemas conservativos*



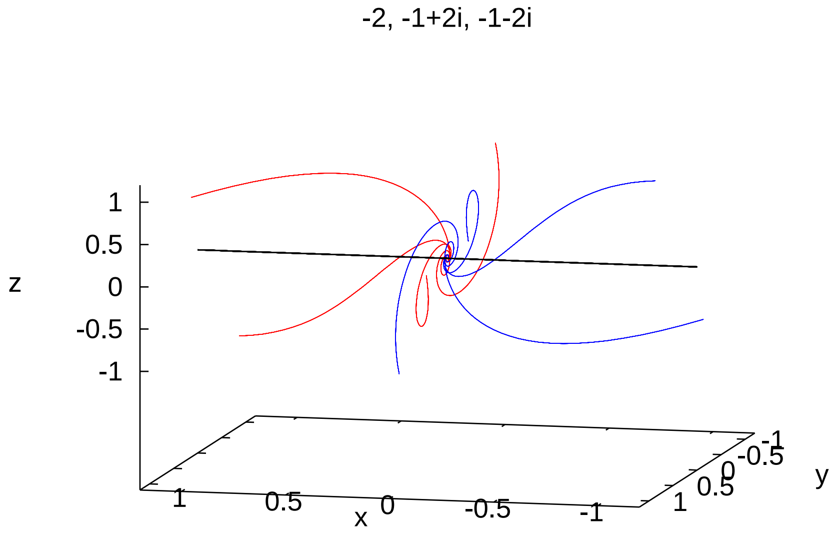
Sistema:

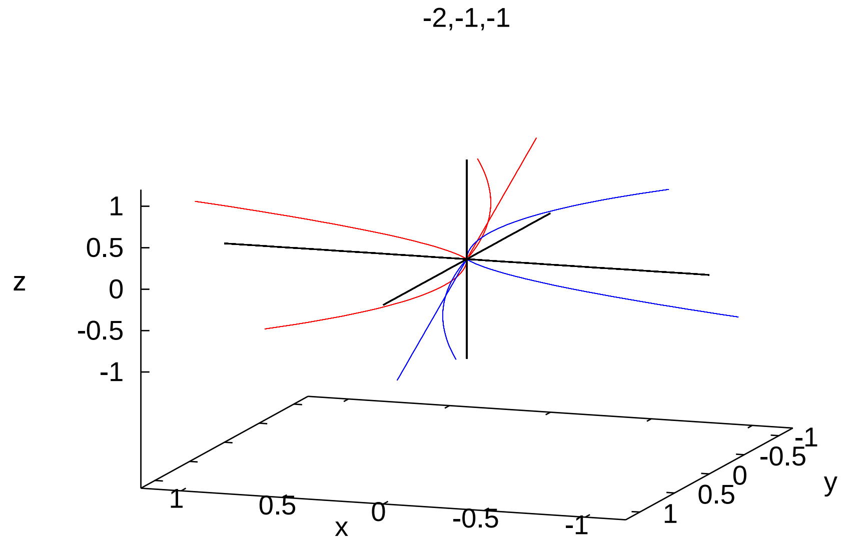
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2, \\ \dot{y} = y + x^2. \end{cases}$$

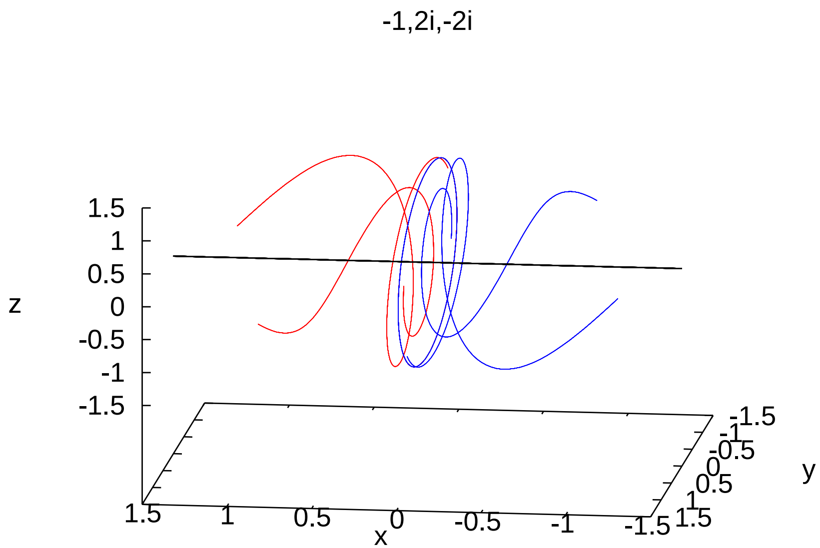
Puntos críticos:
$(0,0)$ *y* $(-1,-1)$.

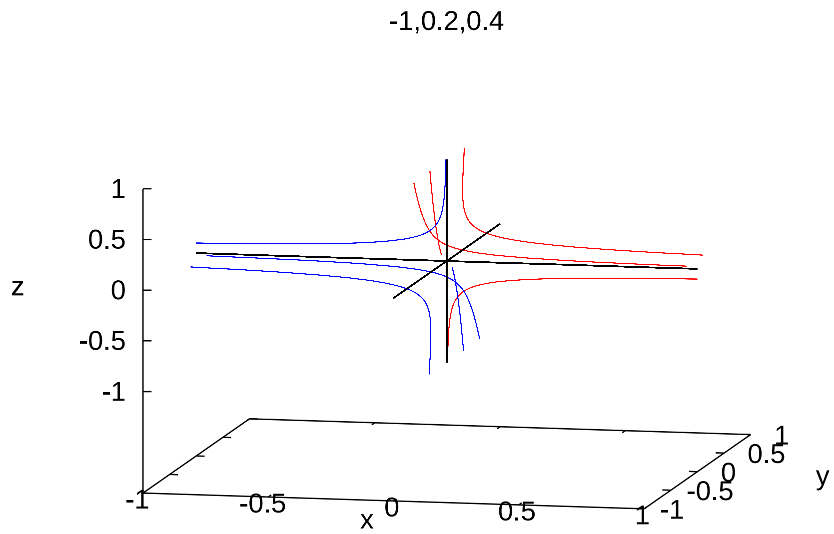
Diagrama de fases con puntos críticos y campo de velocidades

Ejemplo: $E = \mathbb{R}^3$. Podemos tener:

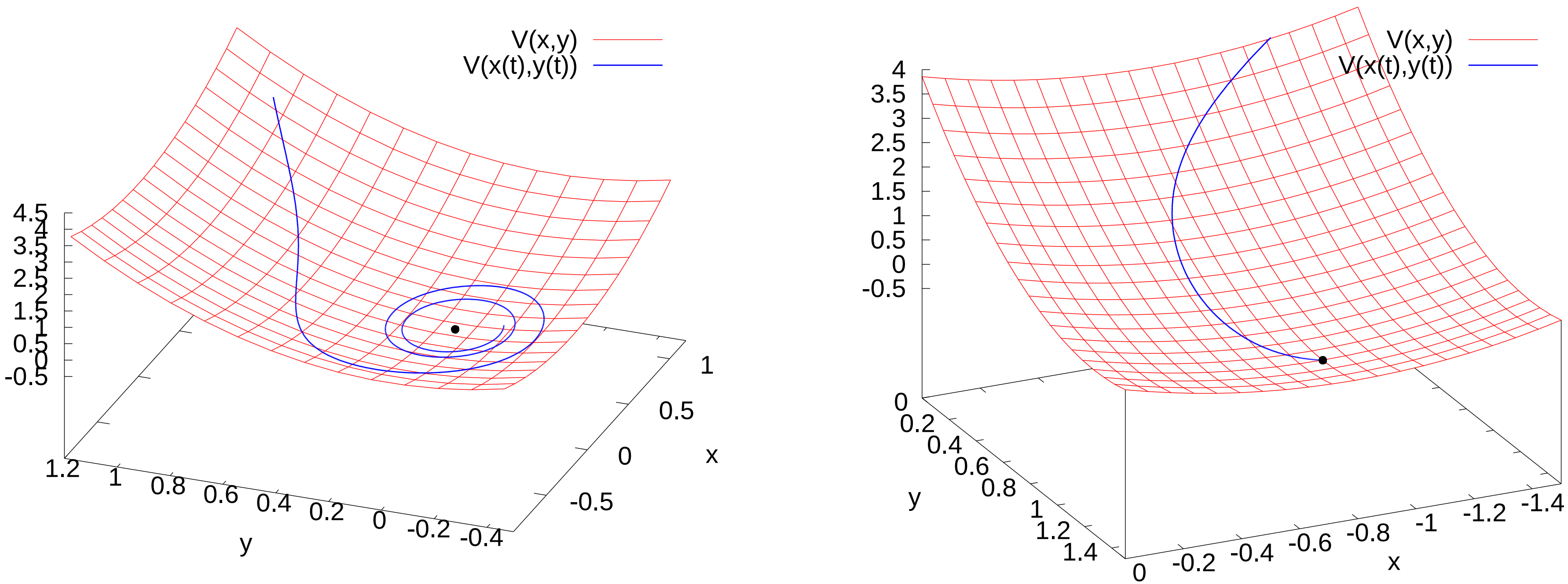


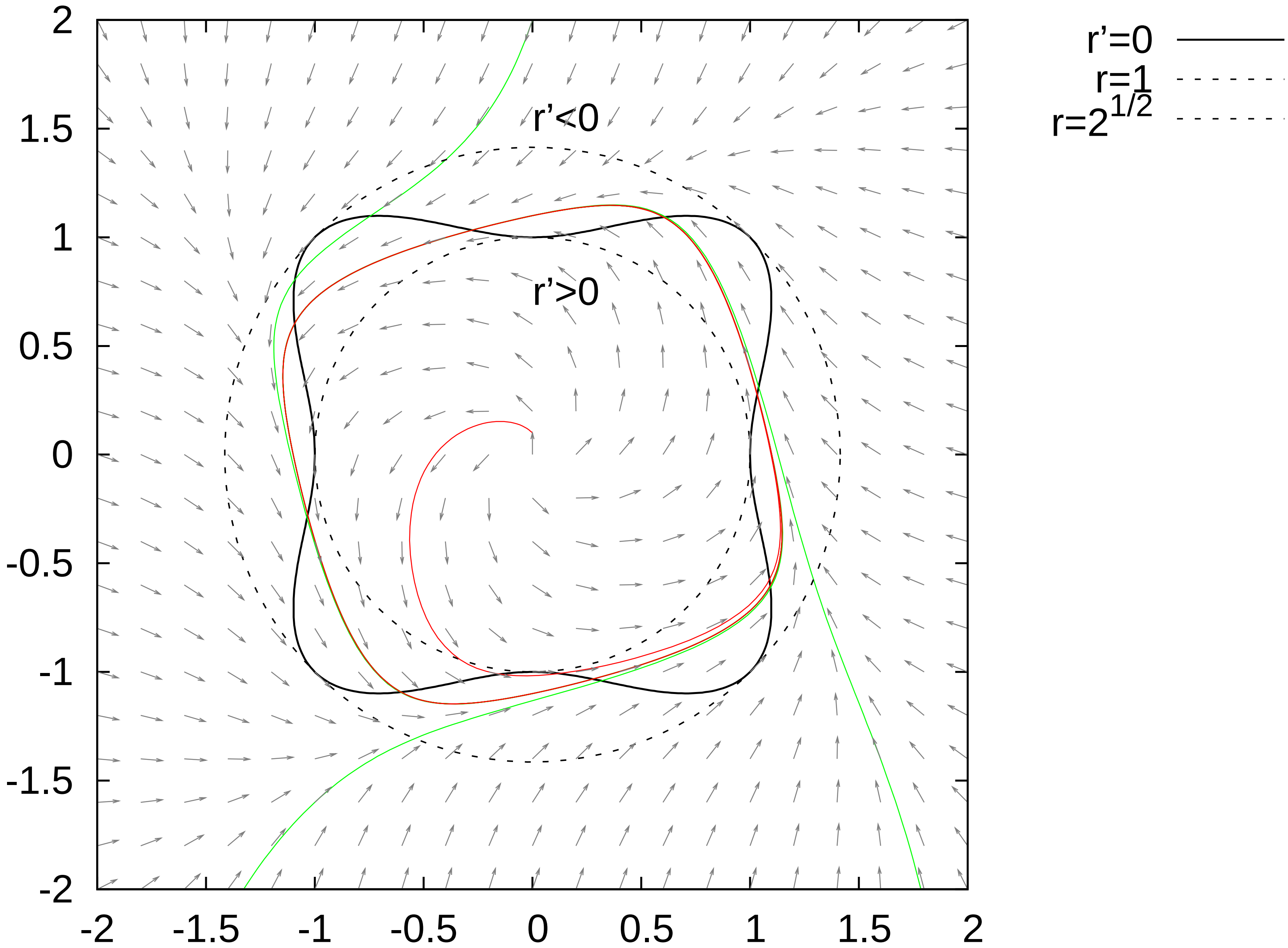






Dos ilustraciones: trayectorias sobre la (hiper-)superficie definida por una función de Liapunov, para un punto tipo foco (izquierda) y uno tipo nodo (derecha)



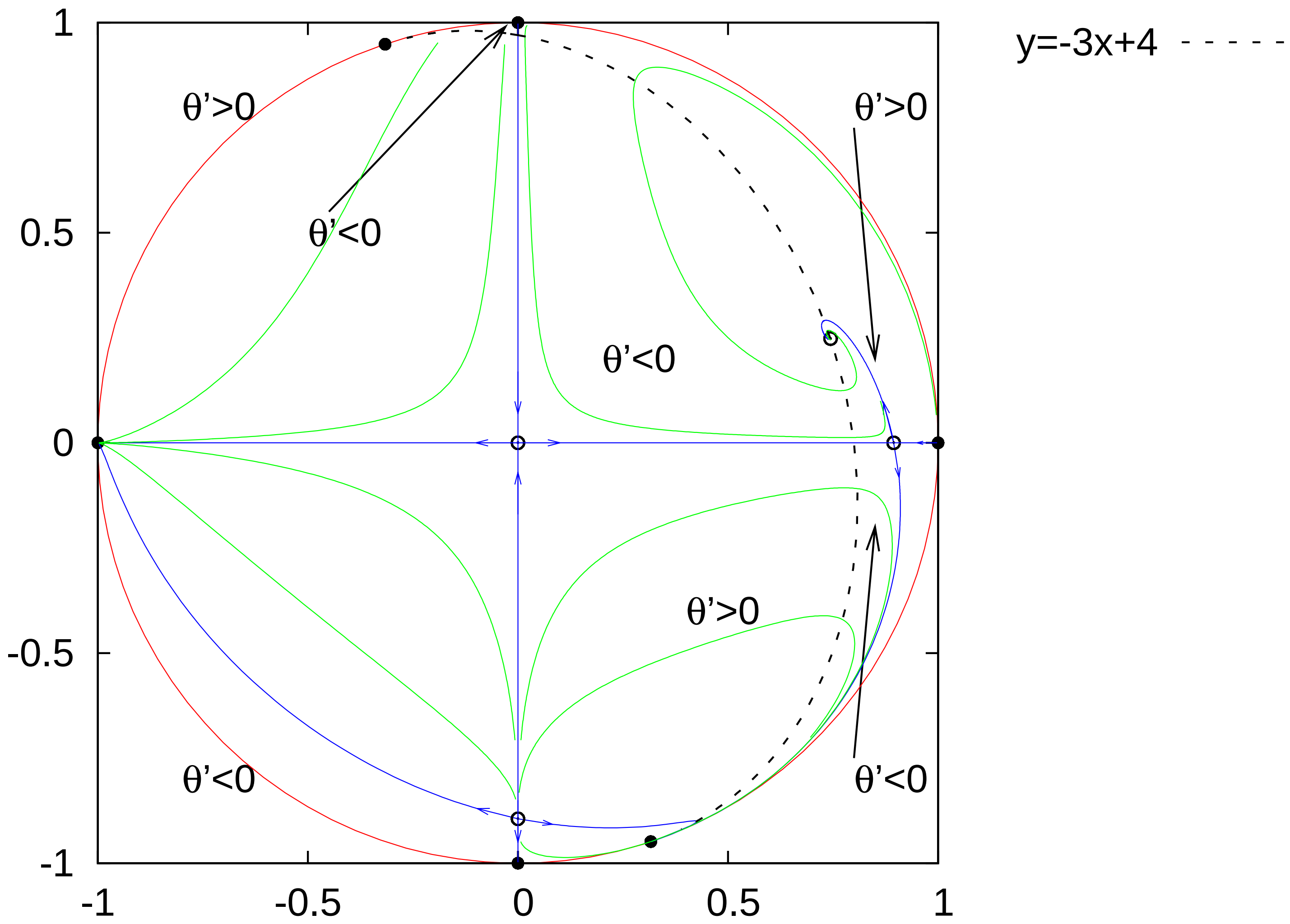


r'=0
r=1
r=2^{1/2}
r'<0
r'>0
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

Ejemplo:

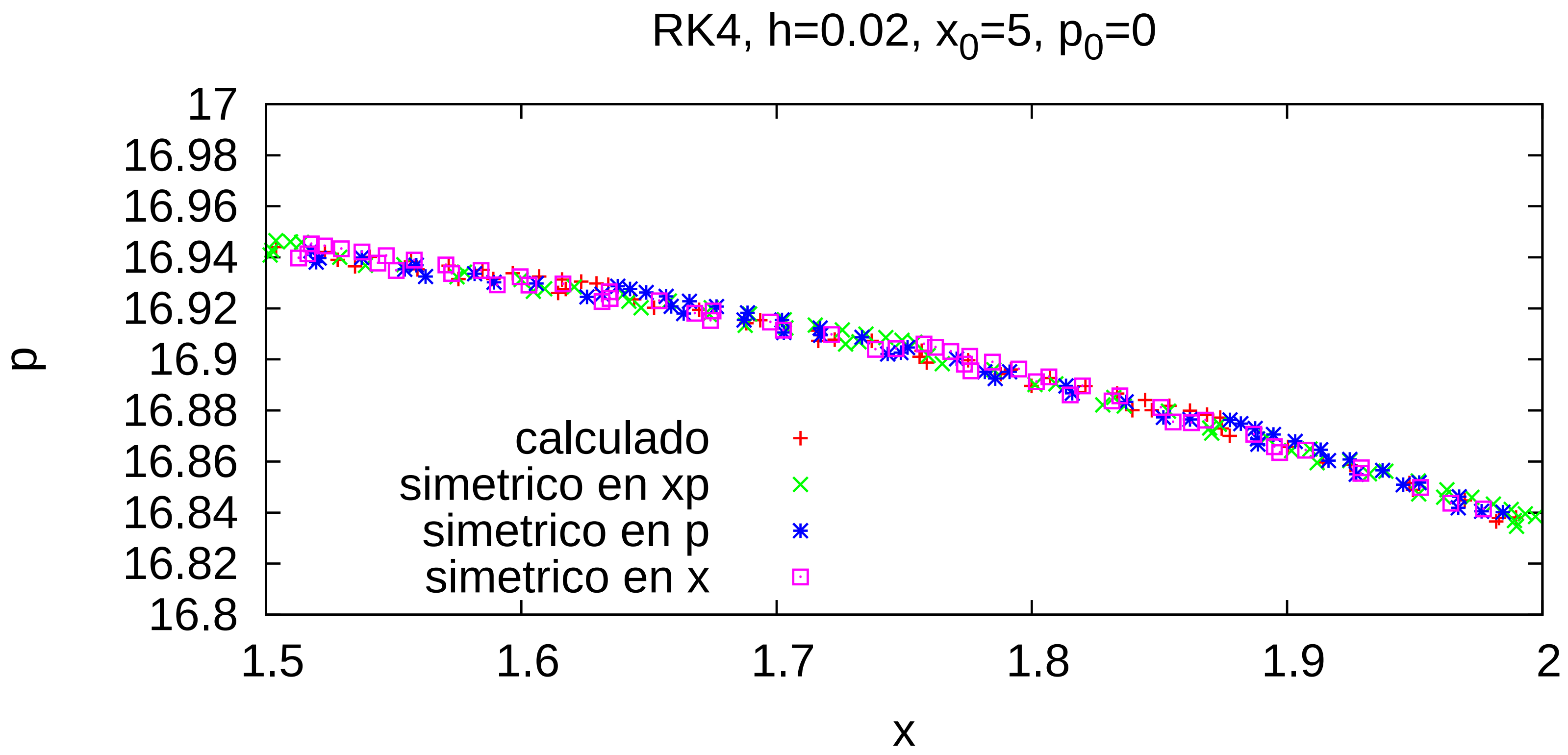
$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - \dfrac{x}{2} - y\right), \\ \dot{y} = y\left(x - 1 - \dfrac{y}{2}\right). \end{cases}$$

Puntos fijos: $(0,0)$ (silla), $(0,-2)$ (nodo inestable), $(2,0)$ (silla) y $(6/5, 2/5)$ (foco asint. estable). Los puntos críticos del infinito cumplen (grado 2): $uv(3u+v) = 0$ y son, por tanto $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1/\sqrt{10}, \mp 3/\sqrt{10})$.



$$\dot{\theta} = \frac{3x^2y - 4xy + xy^2}{2r^2} = 0 \Longrightarrow xy = 0, \text{ o bien } \; y = -3x + 4\,.$$

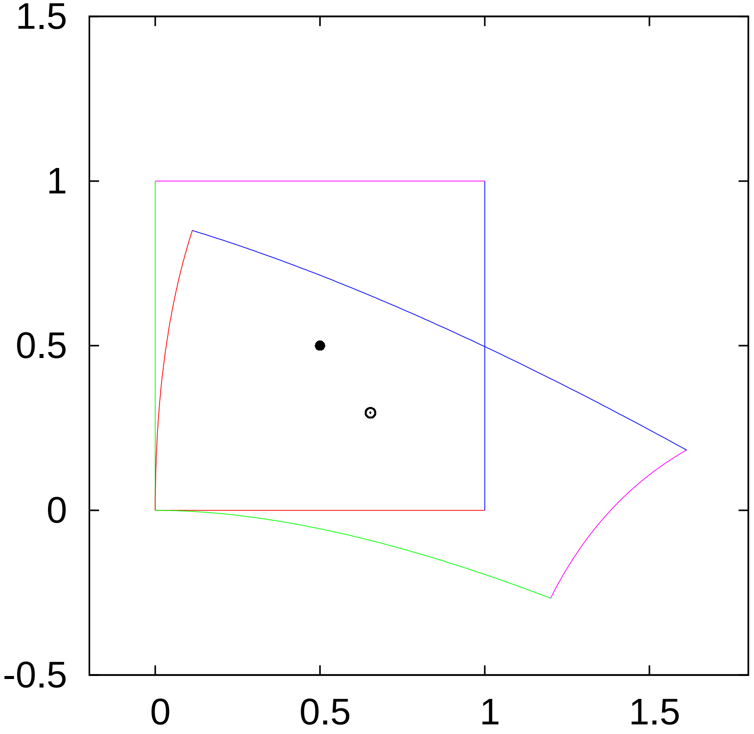
(detalle ampliado)

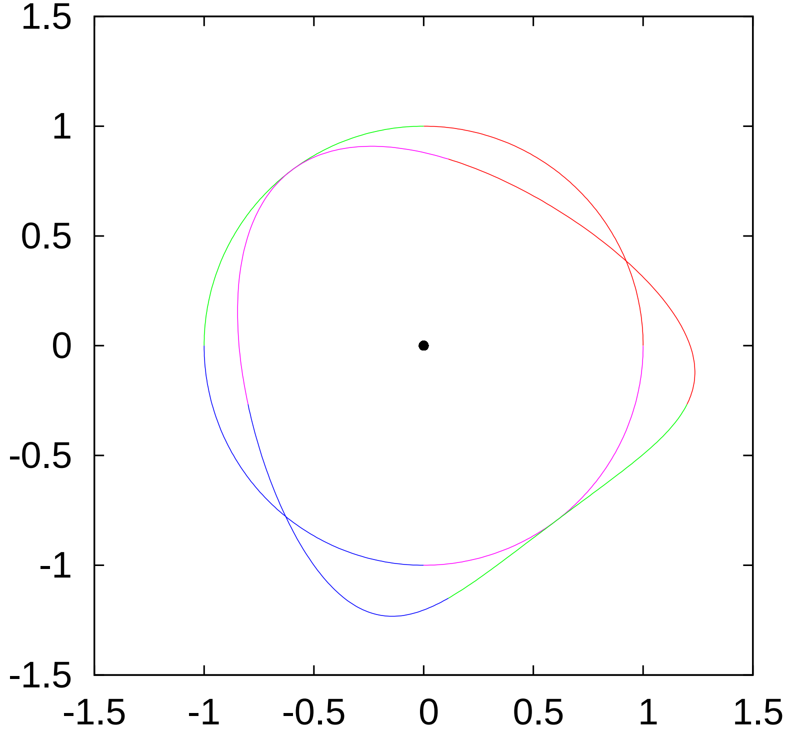


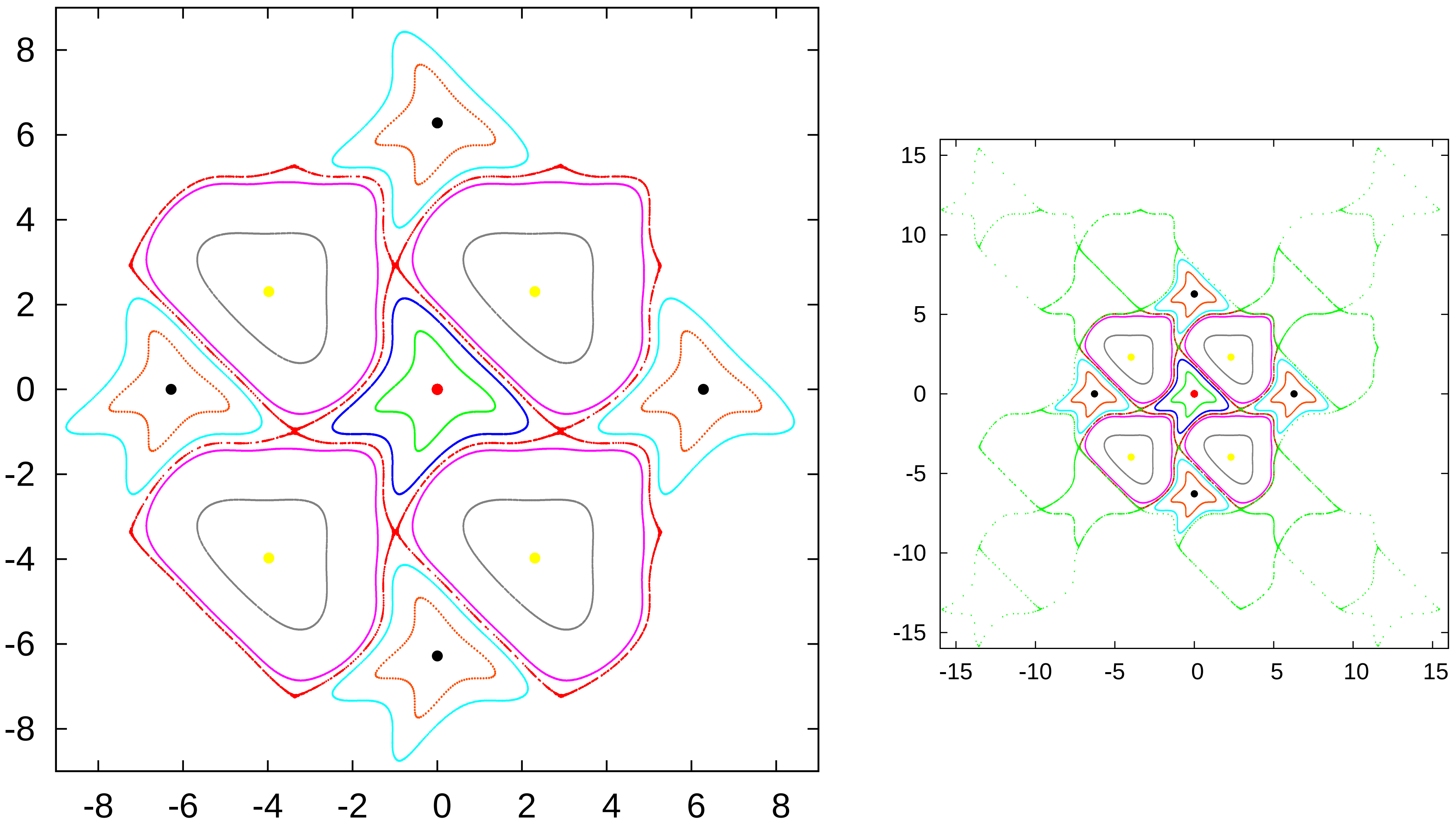
Ejemplo: El sistema dinámico dado por

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}x_n^2 + \dfrac{1}{2}y_n^2 + x_n y_n \\[2ex] y_{n+1} = x_n - \dfrac{1}{2}x_n^2 - \dfrac{1}{2}y_n^2 - x_n y_n \end{cases} \quad \text{tiene por jacobiano:} \quad \begin{vmatrix} x_n + y_n & 1 + x_n + y_n \\ 1 - x_n - y_n & -x_n - y_n \end{vmatrix} = -1.$$

Conserva el área pero cambia la orientación.

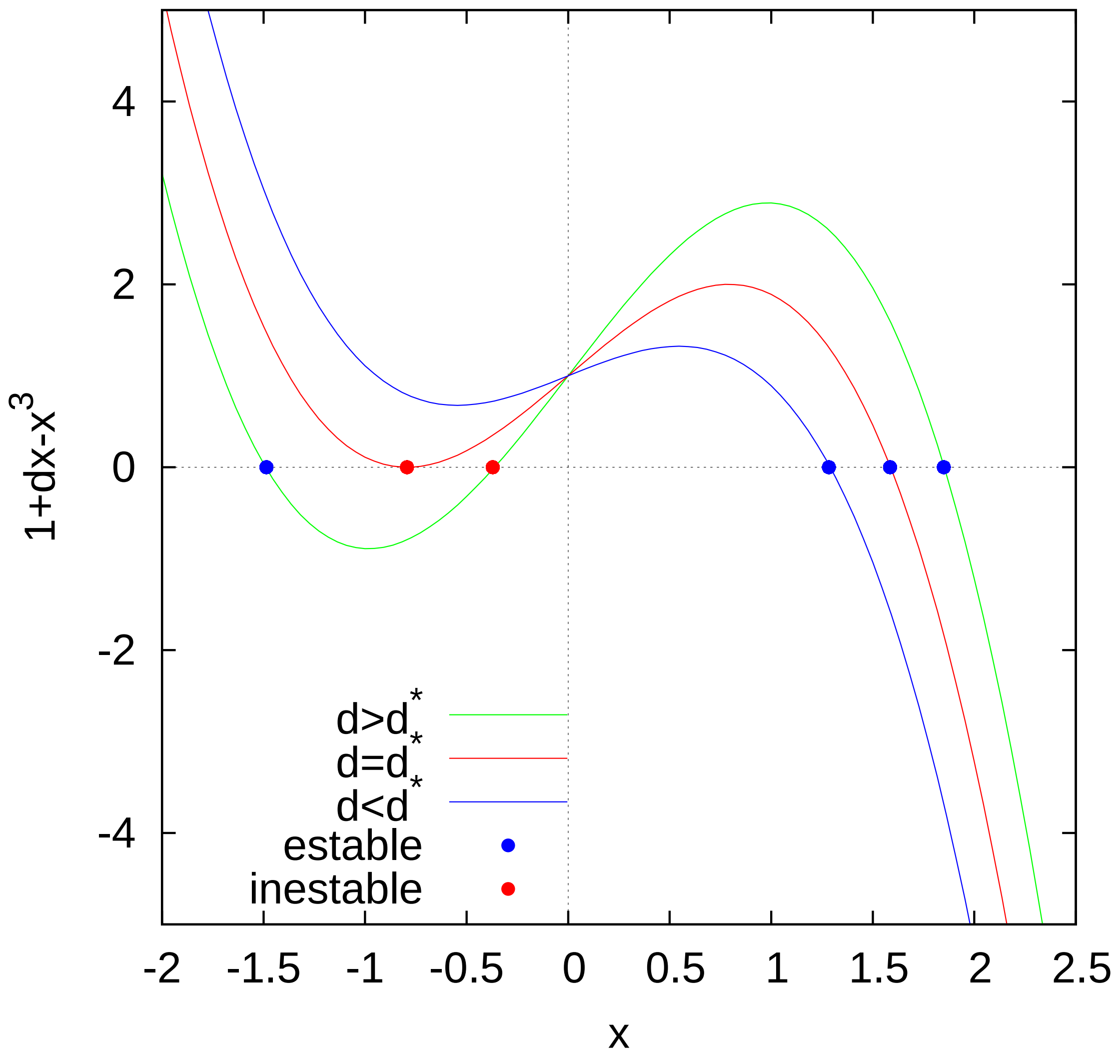




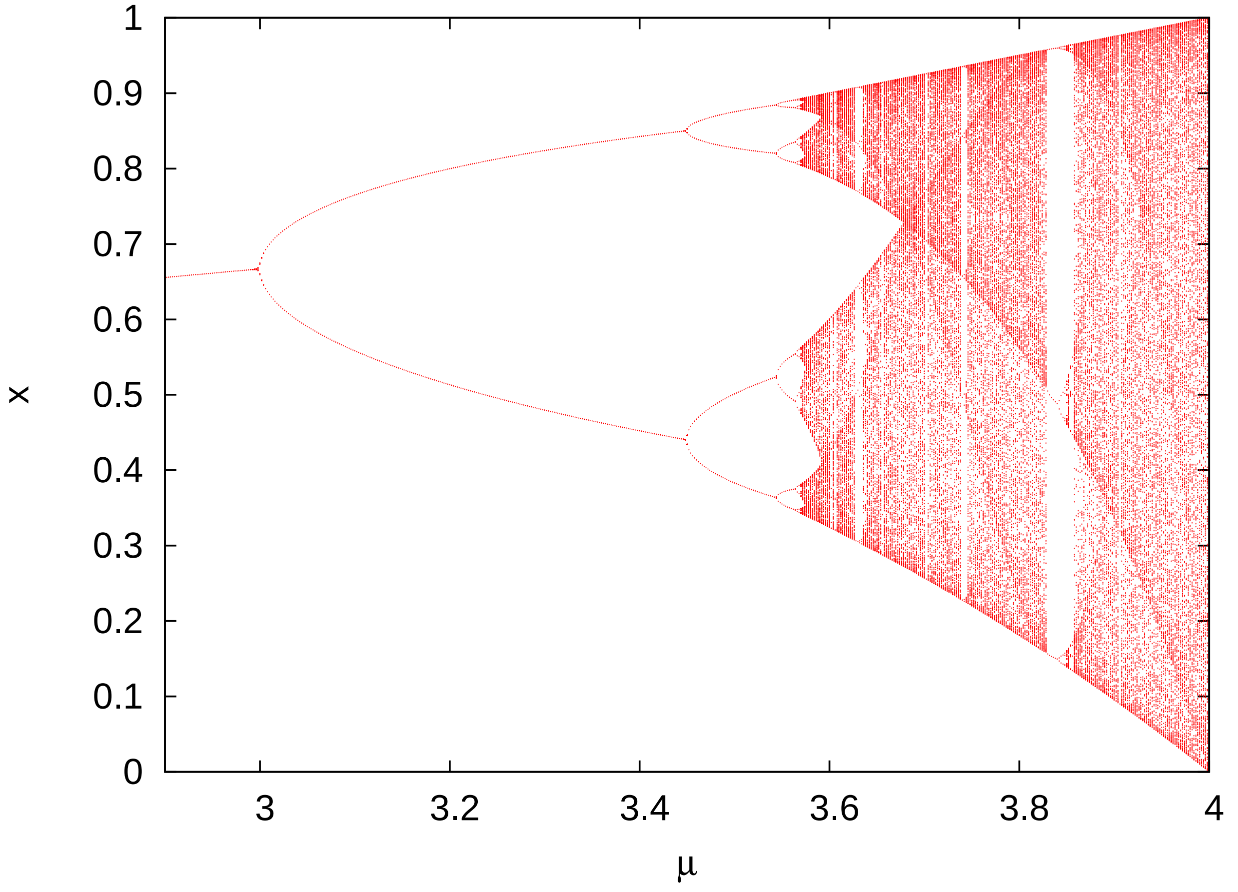

8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8 -6 -4 -2 0 2 4 6 8
15
10
5
0
-5
-10
-15
-15 -10 -5 0 5 10 15

Otras bifurcaciones

El sistema $\dot{x} = 1 + dx - x^3$ es similar al caso anterior, con la diferencia de que existe un valor $d^* = \frac{3}{2}2^{1/3}$ tal que:
para $d < d^*$ hay un único punto crítico,
para $d = d^*$ hay dos,
y para $d > d^*$ tres.
Podemos verlo como:



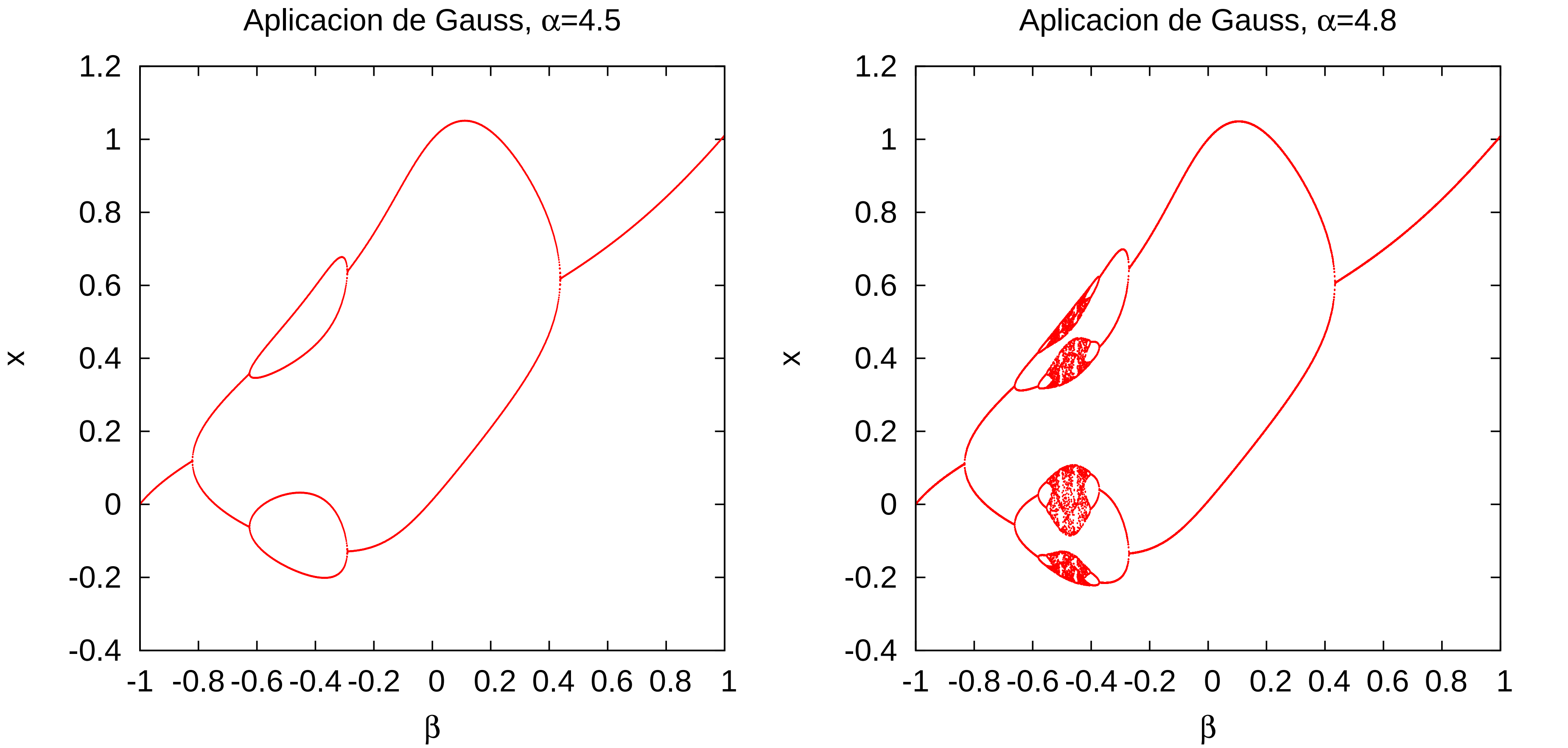
Con algo más de detalle:



Este *diagrama de Feigenbaum* nos da una idea de cómo de compleja o de sencilla es la órbita del atractor al que tiende la mayoría de las soluciones para tiempos largos.

No siempre los diagramas revelan caos. Puede haber casos en los que según los parámetros el sistema sea o no caótico. Un ejemplo es la aplicación de Gauss dada por

$$x_{n+1} = \exp(-\alpha {x_n}^2) + \beta \,.$$

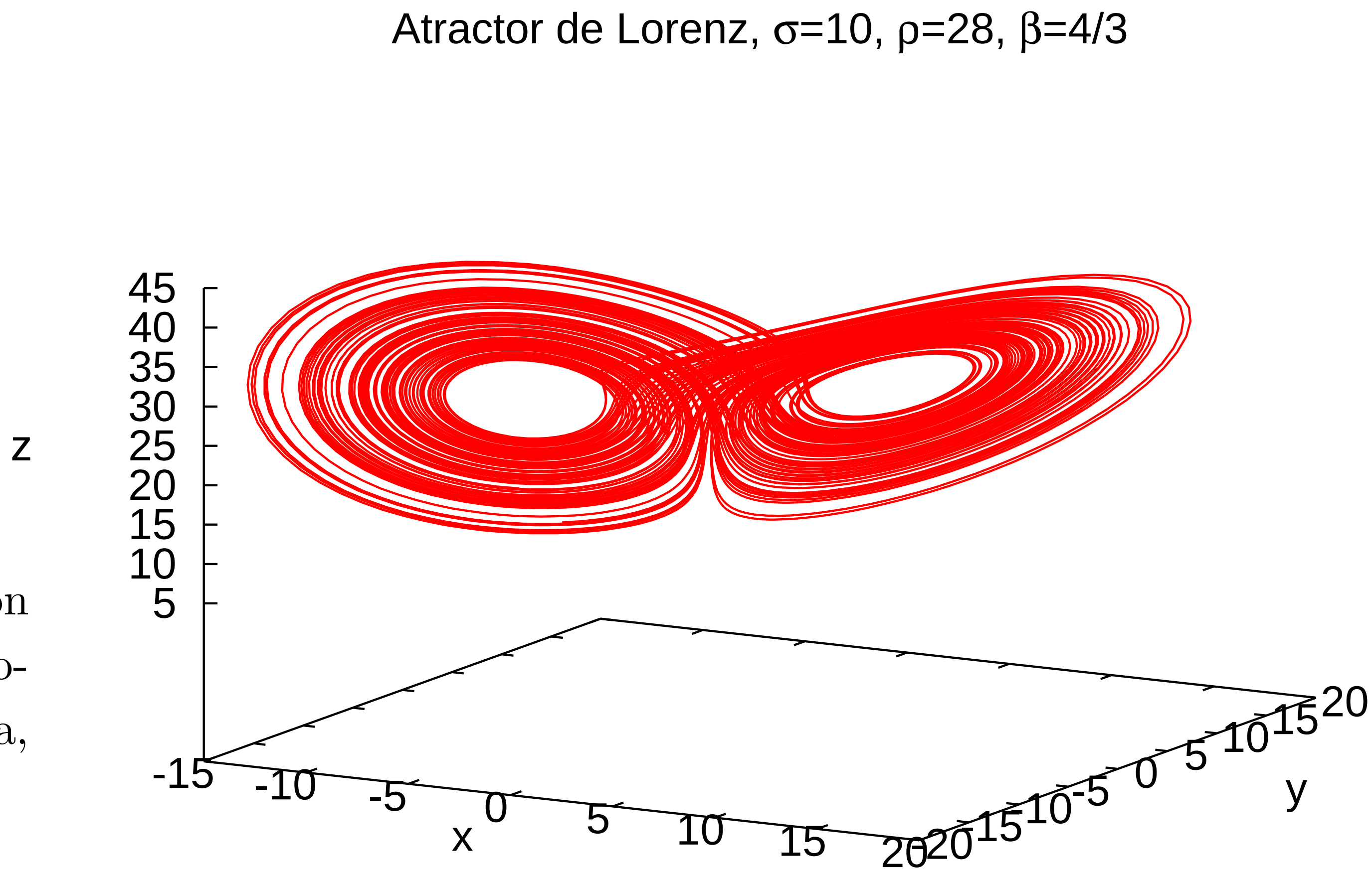


Dos ejemplos son:

el sistema de Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

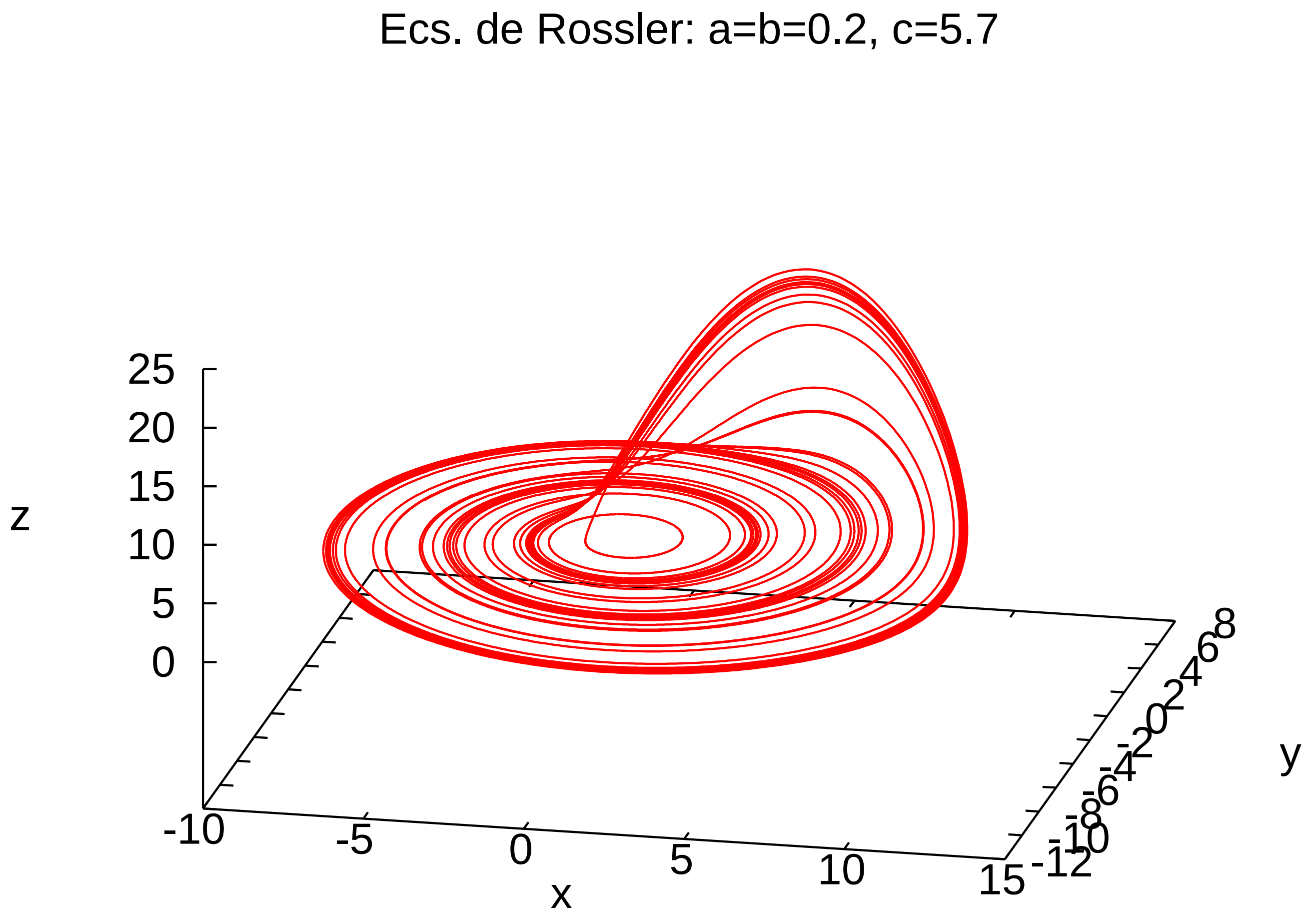
que es una simplificación de las ecuaciones hidrodinámicas de la atmósfera,



y el de Rössler,

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases}$$

que corresponde a una reacción química. Ambos presentan un "atractor extraño". Otro modelo interesante es el de Chua que corresponde a un circuito electrónico con un diodo.



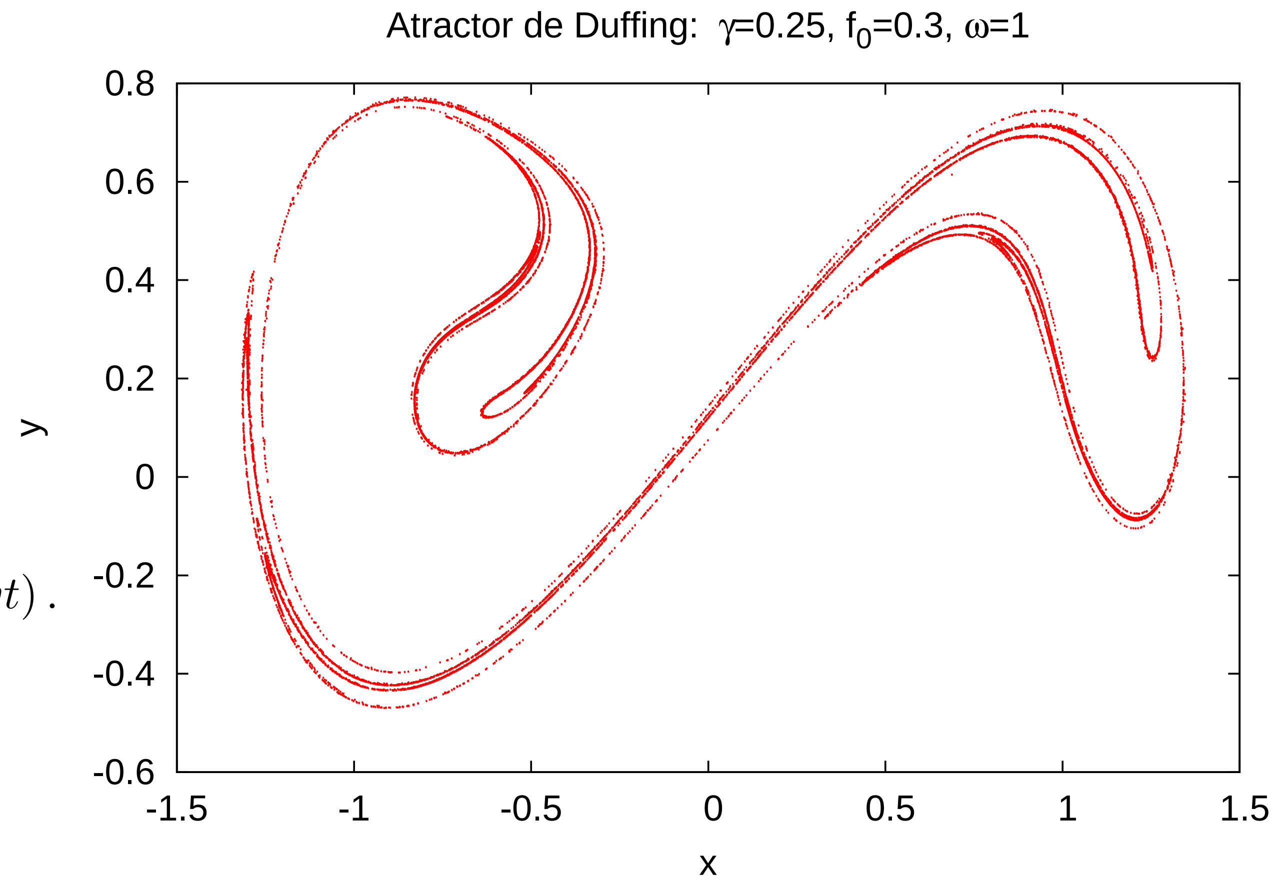
Otro modelo con atractor extraño corresponde a la ecuación de Duffing, que modela un sistema electromecánico:

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}-x+x^3 = f_0 \cos(\omega t).$$

Escrita como sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y + x - x^3 + f_0 \cos(\omega t)\,. \end{cases}$$

El atractor aparece para cortes de la aplicación estroboscópica con periodo $T = 2\pi/\omega$.



4.3. Ejemplos de caos en sistemas discretos con dimensiones 1 y 2

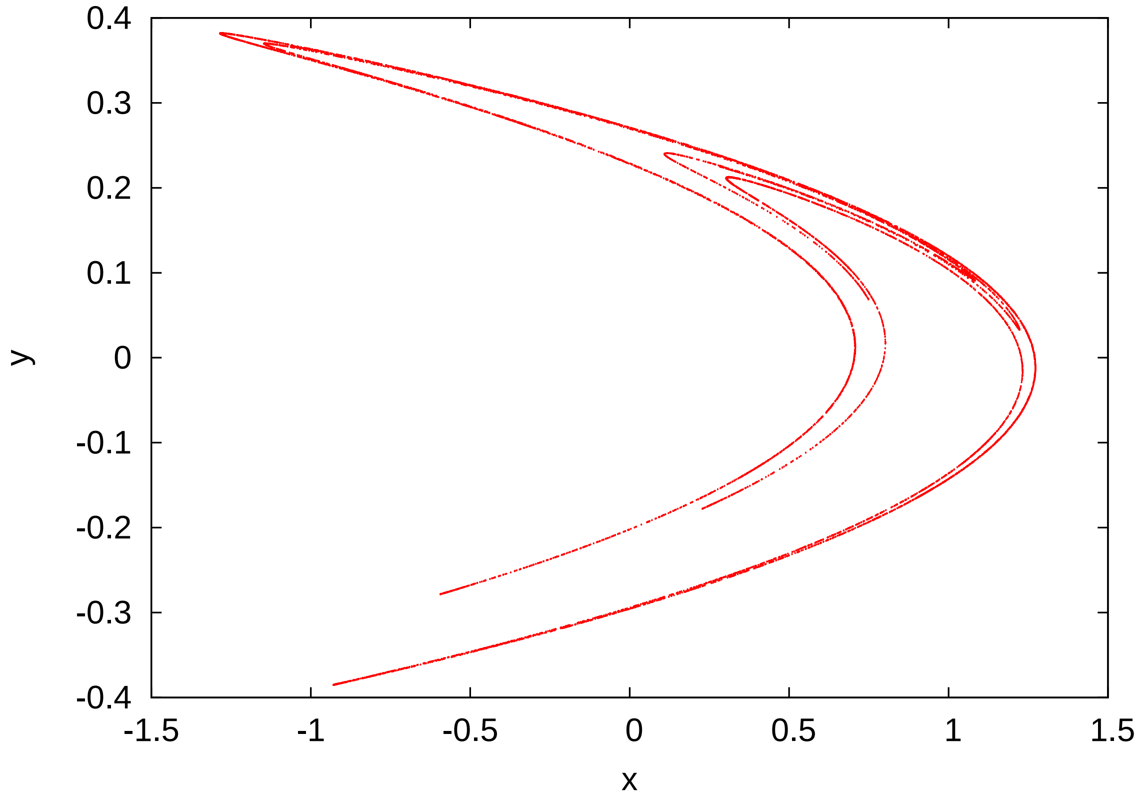
El caos puede aparecer ya desde dimensión 1.

Hemos visto ya varios ejemplos: la aplicación logística, la aplicación estándar, la aplicación conservativa de Hénon.

Otro ejemplo famoso es la aplicación (no conservativa) de Hénon dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a{x_n}^2 + y_n, \\ y_{n+1} = b x_n, \end{cases}$$

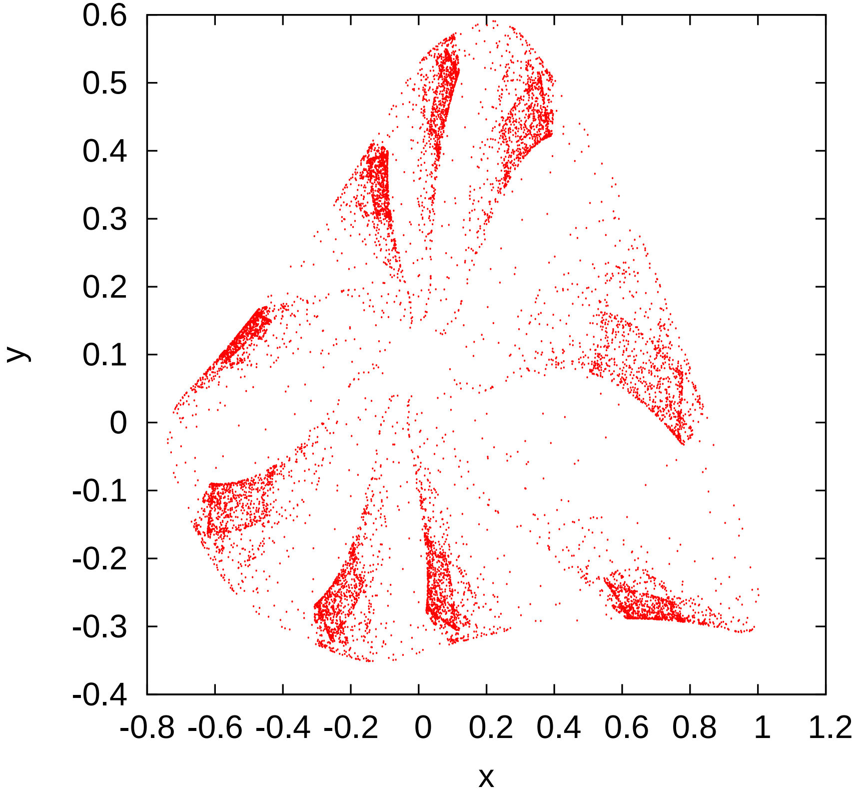
con $a = 1{,}4$ y $b = 0{,}3$. Para estos valores de los parámetros presenta un atractor extraño (similar al de la ecuación de Duffing).

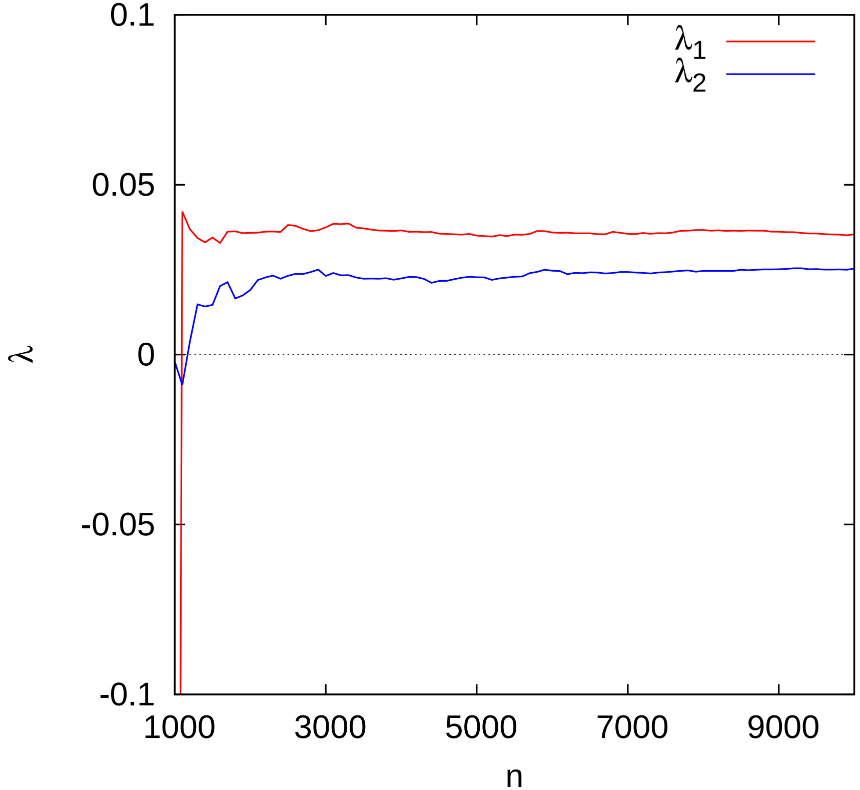


El caos se manifiesta igual que para los sistemas de tiempo continuo.

Ejemplo: El sistema cuadrático

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 0{,}4y_n + 0{,}5{x_n}^2 - 1{,}1x_ny_n + 0{,}3{y_n}^2 \\ y_{n+1} = 0{,}2 + 0{,}3x_n - 1{,}1y_n - 0{,}5{x_n}^2 + 0{,}7x_ny_n + 0{,}1{y_n}^2 \end{cases}$$





tiene un atractor extraño caótico (además con ambos exponentes de Liapunov positivos).

Las soluciones caóticas corresponden a valores de μ para los que aparece una "nube" de puntos en el diagrama de Feigenbaum (en la gráfica, superpuesto al exponente de Liapunov):